4. Gyökvonás, gyökfüggvények

Négyzetgyök:

Egy a nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelynek a négyzete a.

N-edik gyök:

$n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$
Egy a nemnegatív valós szám $2k$-adik gyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek $2k$-adik atványa a.

$n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}^+$
Egy a valós szám $2k+1$-edik gyöke az a valós szám, amelynek a $2k+1$-edik hatványa a.

Definícióból következik:

$\sqrt[n]{a^n} =$

$|a|$, ha $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$
a, ha $n = 2k+1$

TÉTELEK:

- *négyzetgyök azonosságai:*

- szorzat négyzetgyöke = a tényezők szorzatának négyzetgyökével

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$
Biz:
a $\sqrt{a}\sqrt{b}$ nem negatív
Azt kell bizonyítani hogy a négyzete egyenlő ab-vel.
$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$
(szorzat hatványozása, valamint négyzetgyök def.-ja alapján)

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$
Biz:
a $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ nem negatív
Azt kell bizonyítani, hogy a négyzete egyenlő $\frac{a}{b}$-vel.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a}{b}$$

(hányados hatványozása)

$\sqrt{a^k}=\left(\sqrt{a}\right)^k$, $a\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}$ (ha $k\in\left(\mathbb{Z}^-\cup\{0\}\right.$, akkor $\left.a\neq 0\right)$

Biz:

a) $k\in\mathbb{Z}^+$

$$\sqrt{a^k}=\sqrt{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^k$$

b) $k=0$, $a\neq 0$

$$\sqrt{a^0}=\sqrt{1}=1=\left(\sqrt{a}\right)^0$$

c) $k\in\mathbb{Z}^-$, $k=-l$, $l\in\mathbb{Z}^+$

$$\sqrt{a^k}=\sqrt{a^{-l}}=\frac{1}{\sqrt{a^l}}=\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^l}=\left(\sqrt{a}\right)^{-l}=\left(\sqrt{a}\right)^k$$

- *n-edik gyök azonosságai:*

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

Biz:

vegyük mindkét oldal n-edik hatványát!

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n=ab$$

(definíció)

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n=ab$$

(szorzat hatványozása valamint definíció)

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$

Biz:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}=\frac{a}{b}$$

(hányados hatványozása)

$\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$, $k\in\mathbb{Z}$

Biz:

vegyük mindkét oldal n-edik hatványát

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right]^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk}=\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^k=a^k$$

(hatvány hatványozása)

$\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k$

(definíció)

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$

Biz:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$$

TÉTEL:

Ha $a \in \mathbb{Z}^+$ és a nem négyzetszám, akkor $\sqrt{a}$ irracionális.

Biz:

indirekt módon

Tfh. $\sqrt{a} = \dfrac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^+$

$$a = \frac{p^2}{q^2}$$

$$aq^2 = p^2$$

Mivel az a nem négyzetszám, ezért a prímhatványtényezős felbontásában biztosan van olyan prímhatvány, amelyiknek a kitevője páratlan, és mivel az a-t egy négyzetszámmal szorozzuk, ezért ennek a prímhatványnak a kitevője a bal oldalon páratlan lesz. A jobb oldalon viszont a prímhatványtényezős felbontásban minden prímhatvány kitevője páros, így a két oldal nem lehet egyenlő.

Tehát ellentmondásra jutottunk, így a $\sqrt{a}$ irracionális.

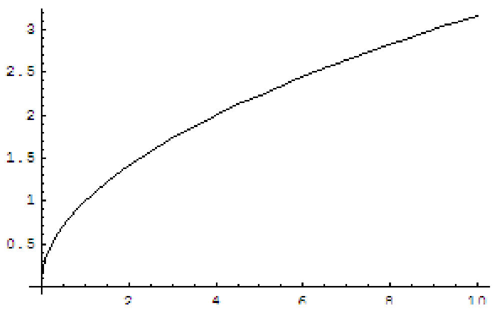
Gyökfüggvények:

Def: $f: H \to R$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$

$H = R$, ha $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}^+$

$H = R^+ \cup \{0\}$, ha $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}^+$

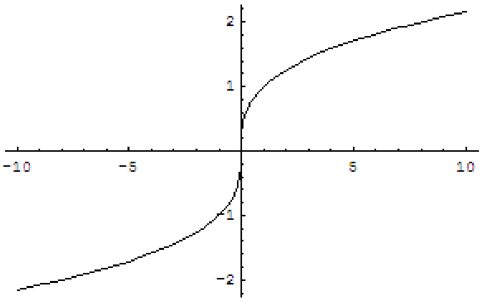
$f(x) = \sqrt{x}$



- $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$
- $R_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$
- zérushely: $x = 0$
- max.: nincs
- min.: $x = 0$
- az értelmezési tartományán szigorúan nő
- konkáv

— alulról korlátos, felülről nem
— se nem páros, se nem páratlan

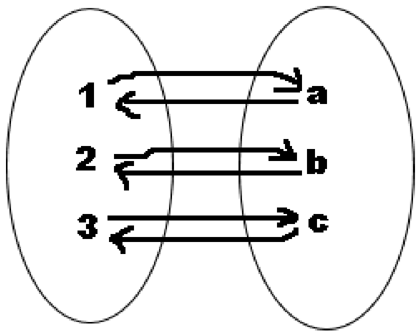
$g(x)=\sqrt[3]{x}$



— $\mathbb{R}_g=\mathbb{R}$
— zérushely: $x=0$
— szig. mon. növekvő
— nem korlátos
— páratlan -> origóra szimmetrikus
— $]-\infty;0]$-on konvex, $[0;\infty[$-on konkáv
— folytonos
— Ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik az összes páratlan gyökfüggvény.

Inverz függvény:

f és g egymás inverzei, ha $D_f=R_g$ és $R_f=D_g$, továbbá ha minden $x\in D_f$ esetén $g\left[f(x)\right]=x$.



$f:\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-\right)\to\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-\right);\ f(x)=\sqrt[2k]{x}$
$f^{-1}:\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-\right)\to\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-\right);\quad E$

$f^{-1}\circ f:\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-\right)\to\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^-\right);\ \left(f^{-1}\circ f\right)(x)=\left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k}=x$
$y=x$-re szimmetrikus

$g:\mathbb{R}\setminus\mathbb{R};\ g(x)=\sqrt[2k+1]{x}$
$g^{-1}:\mathbb{R}\setminus\mathbb{R};\ g^{-1}(x)=x^{2k+1},\ k\in\mathbb{Z}^+$

Alkalmazások:

szórás, statisztika, közepek, hatványközepek, kamatos kamat, inga lengésideje, gyökös egyenletek megoldása